Quantum Computing

“Math Computing: LinearAlgebra”

Dr. Cahit Karakuş, Mart - 2021

Giriş

- **Amaç**
  - Quantum Mekaniğinin Prensipleri
  - Lineer Cebir
  - Olasılık

- **Neden lineer cebir?**
  - Lineer Cebir, Quantum Mekaniğini anlamak için ön koşuldur.

- **Lineer cebirin hangi kısmı?**
  - Vektör uzaylarının incelenmesi ve bu vektör uzaylarında doğrusal işlemler

Ders Hedeflari

- Doğrusal Cebirden temel kavramları gözden geçirilmesi:
  - Complex numbers
  - Mantık Kapıları Boole Cebri
  - Dirac (Bra-ket) Notation
  - Qubit
  - Vector Spaces and Vector Subspaces
  - Linear Independence and Bases Vectors
  - Linear Operators
  - Matrices
  - Inner (dot) product, outer product, tensor product
  - Eigenvalues, eigenvectors,
  - Singular Value Decomposition (SVD)

- Quantum mekaniği çalışmasında bu kavramlar için benimsenen standart notasyonları (Dirac notasyonları) açıklanması...
- Quantum mekaniğinin varsayımları

Dirac (Bra-ket) Notation

Dirac Gösterimi (The Dirac Notation)

- Quantum hesaplama ile birlikte, kubit (qubit) kavramını ihtiyaç duyulan bir notasyon
- Dirac tarafından geliştirilen bir gösterimle karşılanabilmektedir.
- Bra-ket olarak da adlandırılır.
- Bra-ket gösterimi < | > şeklinde sembolize edilebilir.
- Buradaki **bra** kısmı <| olurken **ket** kısmı |> olmuş olur.
- Yani İngilizcedeki parantez anlamına yakın bir kelimeyi parçalara bölerek (aslında brackets kelimesi, İngilizcede parantez anlamına gelir).
- |ψ>, Ket gösterimi, vektörel bir gösterimdir. Diğer bir deyişle, |v> gösterimi aslında [v] şeklinde gösterilebilen bir kolon vektördür. <ψ|, Bra gösterimi ise satır vektörüdür.
- Örneğin ket gösterimi için de bir vektörden bahsedilebilir. Benzer şekilde bra gösterimi için vektörün tersyüzü (transpoze) alınmıştır denilebilir.

Dirac Gösterimi (The Dirac Notation)

Mevcut durum ket, |ψ> ile gösterilir (ψ:psi):

- Örneğin |ψ> gösterimi, parçacığın ψ momentumunda olduğunu ifade etmektedir. Daha farklı belirgin olarak |ψ=3> gösterimi, parçacığın 3 momentumuna sahip olduğunu veya parçacığın 3 konumunda bulunduğunu ifade eder.
- Bu anlamda, elimizdeki bilgileri gösteren ket kısmı, aslında başlangıç vektörü veya başlangıç durumu şeklinde de adlandırılır.

Beklenen Durum bra, <ψ| gösterilir:

- <ψ| bra gösterimi ise ulaşmak istediğimiz hali, veya beklediğimiz durumu göstermeye yarar.
- Örneğin <x=1.5| gösterimi bize, parçacığın, 1.5 konumunda bitmesini istediğimizi veya böyle bir beklentimiz olduğunu gösterir.
- Örneğin <x=1.5 | x=3 > gösterimi, parçacığın 3 konumunda başlayarak 1.5 konumunda bitmesi anlamına gelir.
- Örneğin <x=1 | x=0 > gösterimi, parçacığın 0 konumunda başlayarak 1 konumunda bitmesi anlamına gelir.

Dirac Gösterimi (The Dirac Notation)

- |ψ>, ket gösterimi, mevcut durumun ψ vektörü olduğunu ifade eder.

- Kubitler için olası durumlardan iki tanesi 1 ve 0 olma durumudur ki bu durumda kubitler bizim bildiğimiz klasik bitler gibi davranır. Bu durumları göstermek için |0> veya |1> gösterimi kullanılabilir. Elbette unutulmaması gereken bir durum, kubitlerin, klasik bitlerden farklı değerler alabileceğidir. Örneğin kubitler, 0 ve 1 arasındaki herhangi bir doğrusal değeri alabilir.
- |ψ> = α|0> + β|1> gösterimde, ψ değeri, α değeri kadar 0 ve β değeri kadar 1'dir. Yani bu iki değer arasında bir yerde kabul edilen bir vektördür. Alfa ve beta değerleri, pozitif reel sayı, negatif reel, kompleks sayı olabilir.
- Bu vektörün uzunluğunu birim vektör olarak kabul edersek, Pisagor bağlantısından $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ olmalıdır.

Dirac (Bra-ket) Notation

- Dirac tarafından Hilbert uzayında nesneleri temsil etmek için sunulan gösterim.
- Bra – satır vektörü
- Ket – sütun vektörü
- Bra-kets – iç çarpanlar

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\langle a| = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & \cdots & a_n^* \end{bmatrix}$$

$$\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

Dirac bra/ket notation

Ket: $|\psi\rangle$ always denotes a column vector, e.g. $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix}$

Qubit Gösterimi: $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bra: $\langle\psi|$ always denotes a row vector that is the conjugate transpose of $|\psi\rangle$, e.g. $[\ \alpha^*_1 \ \ \alpha^*_2 \ \ \ldots \ \ \alpha^*_d\ ]$

Bracket: $\langle\varphi|\psi\rangle$ denotes $\langle\varphi|\cdot|\psi\rangle$, the inner product (Skaler Çarpım) of $|\varphi\rangle$ and $|\psi\rangle$

Bra - Ket

$|\psi\rangle$ - vector, "ket" i.e.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$|\psi\rangle$ - vector, "bra" i.e.

$$[c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*]$$

$\langle\varphi|\psi\rangle$ - inner product between vectors $|\varphi\rangle$ and $|\psi\rangle$.

Note for QC this is on $\mathbb{C}^n$ space not $\mathbb{R}^n$!

Note $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

Example: $|\varphi\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 6i \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = [2, -6i] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 6 - 24i$$

Sütun vektör satır vektöre dönüşürken konjugesi alınır.

$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ - tensor product of $|\varphi\rangle$ and $|\psi\rangle$.

Also written as $|\varphi\rangle|\psi\rangle$

Example: $|\varphi\rangle|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 6i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times 4 \\ 6i \times 3 \\ 6i \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 18i \\ 24i \end{bmatrix}$

$\| \, |\psi\rangle \, \|$ - norm of vector $|\psi\rangle$

$$\| \, |\psi\rangle \, \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Important for normalization of $|\psi\rangle$ i.e. $|\psi\rangle / \| \, |\psi\rangle \, \|$

$\langle\varphi|A|\psi\rangle$ - inner product of $|\varphi\rangle$ and $A|\psi\rangle$.

or inner product of $A^\dagger|\varphi\rangle$ and $|\psi\rangle$

Hermitian Conjugation

$$\alpha^* = \overline{\alpha}$$

$$|x\rangle^* = \langle x|$$

$$\langle x|^* = |x\rangle$$

Bra-ket Notation

$$|x\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\langle x| \in \mathcal{H}^*$$

Bra-ket Notation

$$f_x = \langle x|$$

$$\langle x|y\rangle = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

Bra-ket Notation

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \langle x| = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \cdots x_n^*)$$

Bra-ket Notation

$$|x\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\langle x| \in \mathcal{H}^*$$

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \cdots x_n^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Conjugate Space

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$$

$$f_x : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$$

$$f_x \in \mathcal{H}^*$$

Vectors

Linear Algebra

The state space of a quantum system is described as a *vector space*.

Vector spaces are the object of study in *Linear Algebra*..

In this lecture we review definitions from linear algebra that we need in the rest of the course.

We are mainly interested in vector spaces over the *complex number field* – $\mathbb{C}$.

We use the *Dirac notation*—$|v\rangle, |\phi\rangle$ (read as *ket*) for vectors.

Linear Operators

A linear operator A from one vector space $\mathbf{V}$ to another $\mathbf{W}$ is a function such that:

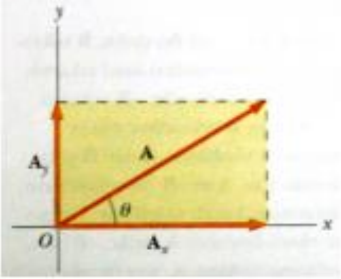
$$A(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) = \alpha(A(|u\rangle) + \beta(A|v\rangle))$$

If $\mathbf{V}$ is of dimension n and $\mathbf{W}$ is of dimension m, then the operator A can be represented as an $m \times n$-matrix.

The matrix representation depends on the choice of bases for $\mathbf{V}$ and $\mathbf{W}$.

Bir Vektörün Bileşenleri

Bir vektör yön, büyüklük veya x- ve y- bileşenleri (koordinat sistemi üzerinde izdüşümü) verilerek ifade edilebilir.



$$A_x = ACos\theta$$
$$A_y = ASin\theta$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Vektör Çarpımı

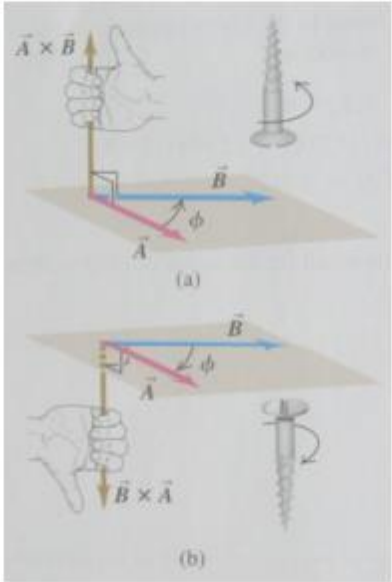
Vektör çarpımının yönü sağ el kuralı ile bulunur

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Vektör çarpımının büyüklüğü

$$C = ABSin\phi$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

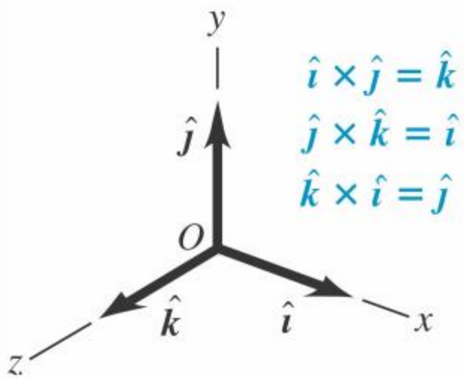


Skaler Çarpım

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = ABCos\theta = |\vec{A}||\vec{B}|Cos\theta$$

$$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = (1)(1)Cos0 = 1$$
$$i \bullet j = i \bullet k = j \bullet k = (1)(1)Cos90^0 = 0$$

A right-handed coordinate system



$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

Birim Vektör

- Vektör: Sonlu sayılar dizisidir.
- $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, bu bir vektördür, $a_{1,}\ a_2, \dots, a_n$ bu vektörün bileşenleridir. n-boyutlu bir vektördür.
- Bir vektör birim vektörler cinsinden ifade edilebilir. $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$; Burada $\hat{\imath}$: x yönündeki birim vektör, $\hat{\jmath}$: y yönündeki birim vektör, $\hat{k}$: z yönündeki birim vektördür.
- Bir vektör uygun baz vektörleri üzerinden genişletilebilir. Baz vektörleri birim vektörlerdir. Herbir bileşeni uygun bir birim vektörü ile çarpılıp toplanırsa vektörün tamamı elde edilir.
- Birim vektörler, Kartezyen koordinat sisteminin eksenlerini ifade etmek için de kullanılabilir. Örneğin, üç boyutlu x,y,z eksenlerinde eş yönlü birim vektörün Kartezyen koordinat sistemi;
- $\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

Vektör

- *Baz vektörleri:*
- $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$
- A vektörünü baz vektörleri cinsinden yazılabilir. Bir vektör bir katsayı ile çarpılırsa sonuçyine bir vektör olur. Bir vektör bir katsayı ile çarpıldığında vektörün tüm bileşenleri o katsayı ile çarpılır.
- $\vec{A} = a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$
- $\vec{B} = \alpha\vec{A} = \alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\\\vdots\\\alpha a_n\end{pmatrix}$
- $\vec{A} = \begin{pmatrix}a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, Bir vektör baz vektörleri şeklinde genişletilebilir.

$\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n$ is the vector space of n-tuples of complex numbers: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

with addition $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$

and scalar multiplication $z \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\alpha_1 \\ \vdots \\ z\alpha_n \end{bmatrix}$

Vector Spaces

A vector space over $\mathbb{C}$ is a set $\mathbf{V}$ with

- a commutative, associative addition operation $+$ that has
  - an identity $\mathbf{0}$: $|v\rangle + \mathbf{0} = |v\rangle$
  - inverses: $|v\rangle + (-|v\rangle) = \mathbf{0}$
- an operation of multiplication by a scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ such that:
  - $\alpha(\beta|v\rangle) = (\alpha\beta)|v\rangle$
  - $(\alpha + \beta)|v\rangle = \alpha|v\rangle + \beta|v\rangle$ and $\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle$
  - $1|v\rangle = |v\rangle$.

Vectors

Formally, the state of a qubit is a unit vector in $\mathbb{C}^2$—the 2-dimensional complex *vector space*.

The vector $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ can be written as

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

where, $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$|\phi\rangle$— a *ket*, Dirac notation for vectors.

We begin by considering a simple memory consisting of only one bit. This memory may be found in one of two states: the zero state or the one state. We may represent the state of this memory using Dirac notation so that

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A quantum memory may then be found in any quantum superposition $|\psi\rangle$ of the two classical states $|0\rangle$ and $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle := \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

In general, the coefficients α and β are complex numbers.

DEFINITION 3.2.1: The "ket". When using a vector $\vec{v}$ to represent a quantum state, we'll use a different notation known as "**ket**", written $|v\rangle$ ("ket v"). This is a notation commonly used in quantum mechanics and doesn't change the nature of the vectors at all. That is, both notations below are equivalent:

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

DEFINITION 3.2.2: The "bra". The conjugate transpose of a "ket" $|v\rangle$ is denoted by:

$$\langle v| = (|v\rangle)^\dagger$$

$\langle v|$ is called "bra v". Again, we stress the fact that this is just a notation and doesn't change the meaning of the conjugate transpose.

DEFINITION 3.2.3: The "braket". Given two vectors $|v\rangle$ and $|w\rangle$, we use the following notation for the inner product:

$$\langle v|w\rangle = |v\rangle \bullet |w\rangle$$

$\langle v|w\rangle$ is known as the braket of $|v\rangle$ and $|w\rangle$.

EXAMPLE

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad |w\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

We can calculate the inner product:

$$\begin{aligned} \langle w|v\rangle &= \frac{-i}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{-i}{2}(1+i) \\ &= \frac{1-i}{2} \end{aligned}$$

Similarly, we can also calculate:

$$\begin{aligned} \langle v|w\rangle &= \frac{i}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{i}{2}(1-i) \\ &= \frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

We can observe that, as proved above, $\langle w|v\rangle = \overline{\langle v|w\rangle}$

Entanglement

An n-qubit system can exist in any superposition of the 2^n *basis* states.

$$\alpha_0|000000\rangle + \alpha_1|000001\rangle + \cdots + \alpha_{2^n-1}|111111\rangle$$

with $\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1$

Sometimes such a state can be decomposed into the states of individual bits

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Entanglement

Compare the two (2-qubit) states:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) \quad \text{and} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

If we measure the first qubit in the first case, we see $|0\rangle$ with probability 1 and the state remains unchanged.

In the second case (*an EPR pair*), measuring the first bit gives $|0\rangle$ or $|1\rangle$ with equal probability. After this, the second qubit is also determined.

Vector

- A vector is a column of numbers (any numbers, even complex). The amount of numbers is referred to as the dimension of the vector.

Vector Addition. Adding vectors is easy, just add each corresponding component! If $\vec{v}$ and $\vec{w}$ are complex vectors written explicitly as:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

adding them gives:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$$

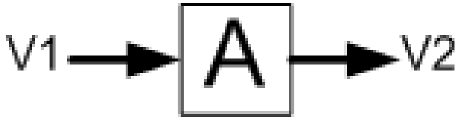
Properties of vector addition and scalar multiplication

1. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$ (commutativity)
2. $\vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})=(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u}$ (associativity)
3. $c(\vec{v}+\vec{w})=c\vec{v}+c\vec{w}$ (distributivity of scalar multiplication)
4. $(c+d)\vec{v}=c\vec{v}+d\vec{v}$ (distributivity of scalar addition)
5. There exists a unique additive zero, denoted $\vec{0}$ such that $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ for any vector $\vec{v}$.
6. For any vector $\vec{v}$, there exists an additive inverse $-\vec{v}$ such that $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.

Matris

Matris

- Bir vektöre etki ettiğinde genel olarak başka bir vektör üreten sisteme matris denir.



- A=$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- Bir matris vektörlerin toplamıdır. a_{ij} ile gösterilir. İ: satırı, j: ise sütunu gösterir.
- $B = A\mathrm{X}$
- $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix}$

Matris

- b_1=$a_{11}\mathrm{x}_1$+$a_{12}\mathrm{x}_2$+ … + $a_{1n}\mathrm{x}_n$
- b_2=$a_{21}\mathrm{x}_1$+$a_{22}\mathrm{x}_2$+ … + $a_{2n}\mathrm{x}_n$
- b_n=$a_{n1}\mathrm{x}_1$+$a_{n2}\mathrm{x}_2$+ … + $a_{nn}\mathrm{x}_n$

- b_i=$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ Burada i=1,2, …,n; j=1,2,…,n.

Birim Matris

- Birim matris bir matrise etki ettiği zaman o matrisin kendisi elde edilir. Birim matrisin tüm köşegen elemanlar 1 dir. Köşegen dışındaki elemanlaro 0 dır.
- $IA = A$
- $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Bir vektör birim matris ile çarpıldığında vektörü değiştirmez.
- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{pmatrix}$

Conjugate and Transpose of Matrix

A^* - complex conjugate of matrix A.

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^* = \begin{bmatrix} 1 & -6i \\ -3i & 2-4i \end{bmatrix}$$

A^T - transpose of matrix A.

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 6i & 2+4i \end{bmatrix}$$

$A^\dagger$ - Hermitian conjugate (adjoint) of matrix A.

Note $A^\dagger = \left(A^T\right)^*$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ -6i & 2-4i \end{bmatrix}$$

Matrices

Given a choice of bases $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ and $|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle$, let

$$A|v_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}|w_i\rangle$$

Then, the matrix representation of A is given by the entries α_{ij}.

Multiplying this matrix by the representation of a vector $|v\rangle$ in the basis $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ gives the representation of $A|v\rangle$ in the basis $|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle$.

Examples

A 45° rotation of the real plane that takes $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ is represented, in the standard basis by the matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

The operator $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ does not correspond to a transformation of the real plane.

Adjoints

Associated with any linear operator A is its *adjoint* $A^\dagger$ which satisfies

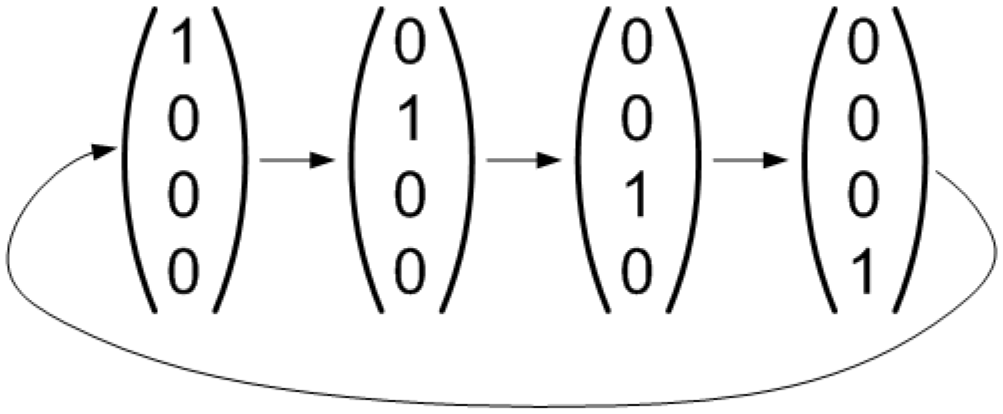
$$\langle v|Aw\rangle = \langle A^\dagger v|w\rangle$$

In terms of matrices, $A^\dagger = (A^*)^T$

where $*$ denotes complex conjugation and T denotes transposition.

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki işlemi gerçekleştiren matris nedir?



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conjugate and Transpose of Matrix

A^* - complex conjugate of matrix A.

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^* = \begin{bmatrix} 1 & -6i \\ -3i & 2-4i \end{bmatrix}$$

A^T - transpose of matrix A.

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 6i & 2+4i \end{bmatrix}$$

$A^\dagger$ - Hermitian conjugate (adjoint) of matrix A.

Note $A^\dagger = \left(A^T\right)^*$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 1 & 6i \\ 3i & 2+4i \end{bmatrix} \text{ then } A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ -6i & 2-4i \end{bmatrix}$$

Basis of a Vector Space

Basis

A *basis* of a vector space $\mathbf{V}$ is a *minimal* collection of vectors $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ such that every vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ can be expressed as a linear combination of these:

$$|v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \cdots + \alpha_n|v_n\rangle.$$

n—the size of the basis—is uniquely determined by $\mathbf{V}$ and is called the *dimension* of $\mathbf{V}$.

Given a basis, every vector $|v\rangle$ can be represented as an n-tuple of numbers.

Bases for $\mathbb{C}^n$

The standard basis for $\mathbb{C}^n$ is $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$
(written $|0\rangle, \ldots, |n-1\rangle$).

But other bases are possible: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -i \end{bmatrix}$ is a basis for $\mathbb{C}^2$.

We'll be interested in *orthonormal* bases. That is bases of vectors of unit length that are mutually orthogonal. Examples are $|0\rangle, |1\rangle$ and $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Basis

Any pair of vectors $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ that are linearly independent could serve as a basis.

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha'|\phi\rangle + \beta'|\psi\rangle$$

The basis is determined by the measurement process or device.

Most of the time, we assume a standard (orthonormal) basis $|0\rangle$ and $|1\rangle$ is given.

This will be called the *computational basis*

Example

The vector $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ measured in the computational basis gives either outcome with probability $1/2$.

Measured in the basis

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

it gives the first outcome with probability 1.

Basis Change

$$E = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$$

$$|\phi\rangle = \alpha_1 |e_1\rangle + \alpha_2 |e_2\rangle + \cdots + \alpha_n |e_n\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$S = \{|s_i\rangle\}_{i=1}^{n}$$

Basis Change

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I |e_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} |s_j\rangle \langle s_j|e_i\rangle$$

$$\sum_{j=1}^{n} |s_j\rangle \langle s_j| = I$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|000\rangle + \alpha_2|001\rangle + \alpha_3|010\rangle + \alpha_4|011\rangle + \alpha_5|100\rangle + \alpha_6|101\rangle + \alpha_7|110\rangle + \alpha_8|111\rangle$$

$$|010\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Binary	Decimal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

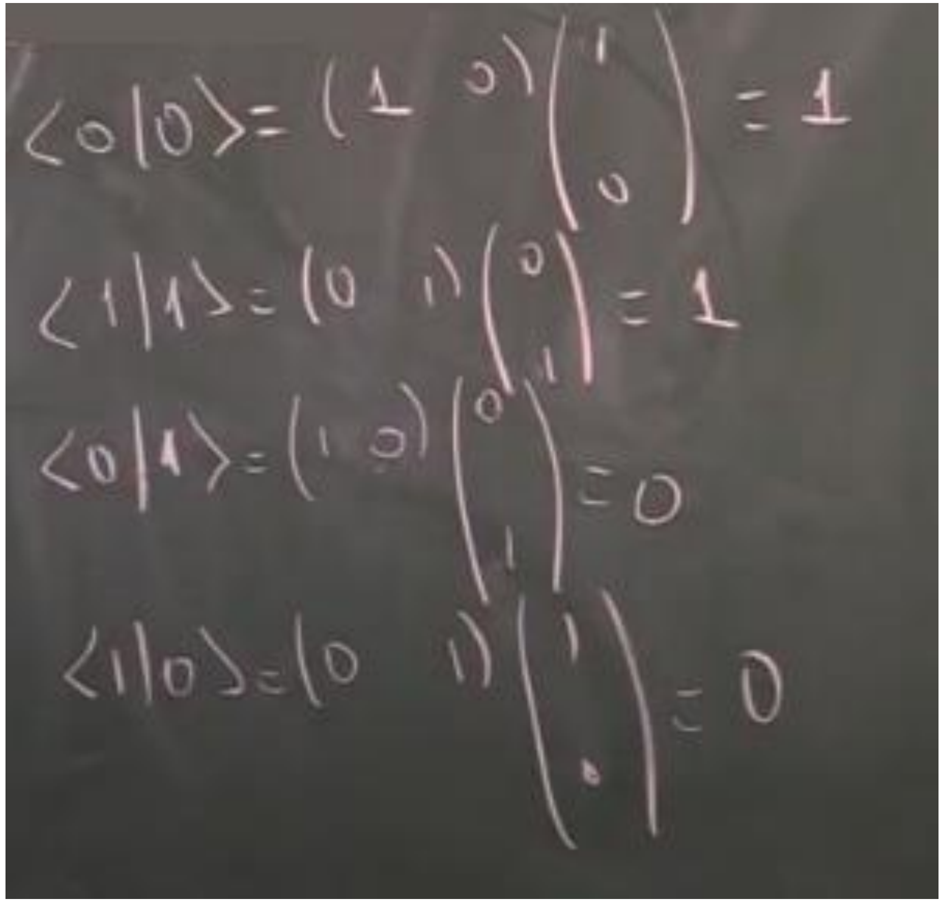
Ortonormal vektör set

- Quantum mekaniğinde ve dirac notasyonunda dalga vektörünün adı. Bu dalga vektörünün kompleks konjugesine ise bra denir. (bracket) kelimesinden türetilmişlerdir.
- Bütün ketler |>bir sütun vektör ile gösterilir.
- Sütun vektörünün kaç tane girdisi var ise o vektörün boyutunu da gösterir.
- Bunlar bir ortonormal vektör set oluştururlar.

Ortonormal vektör set:

- 0 ile 0'ın iç çarpımı <0|0> =1
- 1 ile 1'in iç çarpımı <1|1> =1
- 0 ile 1'in iç çarpımı <0|1> =0
- 1 ile 0'ın iç çarpımı <1|0> =0

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ for } i \neq j \\ 1 \text{ for } i = j \end{cases}$$



Ortagonal - Ortanormal

- Şimdi, gösterildiği gibi iç çarpımı hesaplayarak $\langle 0 \mid 0 \rangle$ değerini 1'e indirebiliriz:
- $\langle 0 \mid 0 \rangle = [10] \cdot [10] = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \langle 0 \mid 0 \rangle = [10] \cdot [10] = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$
- ve çünkü $\langle 0 \mid$ ve $\mid 1 \rangle$ ortogonaldir, iç çarpımı 0'dır, gösterildiği gibi:
- $\langle 0 \mid 1 \rangle = [10] \cdot [01] = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \langle 0 \mid 1 \rangle = [10] \cdot [01] = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

Orthonormal Basis

$$\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{e_i}\}_{i=1}^{n}$$

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_i} = 1,$$

$$i \neq j \iff \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = 0$$

Reverse Basis Change

$U^{-1} = U^{*}$

representation in E

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \psi_i \langle e_1|s_i\rangle \\ \sum_{i=1}^{n} \psi_i \langle e_2|s_i\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} \psi_i \langle e_n|s_i\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1|s_1\rangle & \langle e_1|s_2\rangle & \cdots & \langle e_1|s_n\rangle \\ \langle e_2|s_1\rangle & \langle e_2|s_2\rangle & \cdots & \langle e_2|s_n\rangle \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ \langle e_n|s_1\rangle & \langle e_n|s_2\rangle & \cdots & \langle e_n|s_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

representation in S

Unitary Operators

$$U^*U = UU^* = I$$

Unitary Operators

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

X, Y, Z: Pouli quantum lojik kapılarıdır.
H: Hadamard Quantum Lojik Kapısıdır.
Bir matrisin quatum lojik kapısı olabilmesi için kendisi ile Hermityan ifadesinin çarpımı birim olmak zorundadır.

Unitary Operators

A linear operator A is *unitary* if

$$AA^\dagger = A^\dagger A = I$$

Unitary operators are normal and therefore diagonalisable.

Unitary operators are norm-preserving and invertible.

$$\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle$$

All eigenvalues of a unitary operator have modulus 1.

Unitary Vector

Example:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$
$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = b|0\rangle + a|1\rangle$$

Example:

Let $|\psi\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle = |0\rangle$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Important: U must be unitary, that is $U^\dagger U = I$

Example:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ then } U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I$$

Linear Operator

Linear Operator

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$A(\alpha |x\rangle + \beta |y\rangle) = \alpha A |x\rangle + \beta A |y\rangle$$

Linear Operator

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Linear Operator

$$A |x\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Burada,

- A-Matrisi Quantum Lojik Kapıdır.
- x: Qubit fonksiyonudur. Ket olarak gösterilir.

matrix multiplication

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtaining Matrix

$$A\,|e_1\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Obtaining Matrix

column k

$$A\,|e_k\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

row k

Operations with Operators

$$(\lambda A)\,|x\rangle = \lambda(A\,|x\rangle) = A(\lambda\,|x\rangle)$$

$$(A + B)\,|x\rangle = A\,|x\rangle + B\,|x\rangle$$

Operations with Operators

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Operations with Operators

$$0_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \vdots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Product of Operators

$$(AB)\,|x\rangle = A(B\,|x\rangle)$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$AB \stackrel{?}{=} BA$$

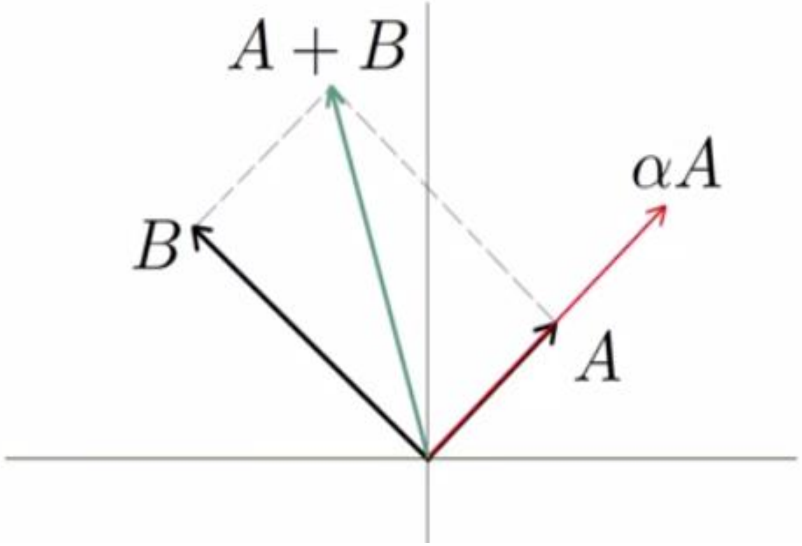
Product of Operators

$$(AB)\,|x\rangle = A(B\,|x\rangle)$$

$$[A, B] = AB - BA$$

Inner Product (Skaler Çarpım)

Linear Vector Space



Operations Properties

$$0 \cdot \boldsymbol{A} = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \boldsymbol{A} + \vec{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{A}$$

$$\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

Inner Product

$$\cdot : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}}$
2. $\boldsymbol{x} \cdot \alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$
3. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \iff \boldsymbol{x} = \vec{\boldsymbol{0}})$

Inner Product in Euclidean Space

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Inner Products

An inner product on $\mathbf{V}$ is an operation that associates to each pair $|u\rangle, |v\rangle$ of vectors a *complex number*

$$\langle u|v\rangle.$$

The operation satisfies

- $\langle u|\alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u|v\rangle + \beta\langle u|w\rangle$
- $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$ where the * denotes the complex conjugate.
- $\langle v|v\rangle \geq 0$ (note: $\langle v|v\rangle$ is a real number) and $\langle v|v\rangle = 0$ iff $|v\rangle = \mathbf{0}$.

Inner Product on $\mathbb{C}^n$

The standard inner product on $\mathbb{C}^n$ is obtained by taking, for

$$|u\rangle = \sum_i u_i|i\rangle \quad \text{and} \quad |v\rangle = \sum_i v_i|i\rangle$$

$$\langle u|v\rangle = \sum_i u_i^* v_i$$

Note: $\langle u|$ is a *bra*, which together with $|v\rangle$ forms the *bra-ket* $\langle u|v\rangle$.

Inner Product in Euclidean Space

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

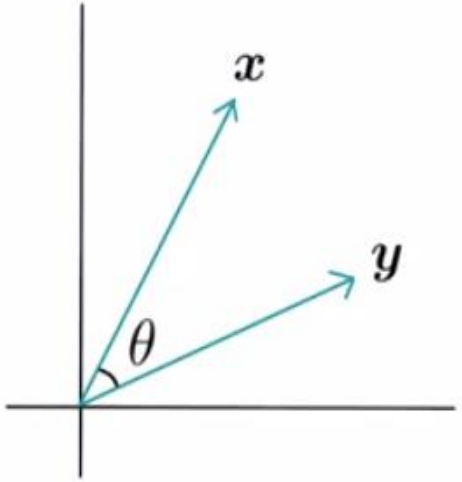
$$\boldsymbol{x} \cdot \alpha \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

Inner Product in Euclidean Space

$$\|x\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|x\|\|y\|}$$



Inner Product in Hilbert Space

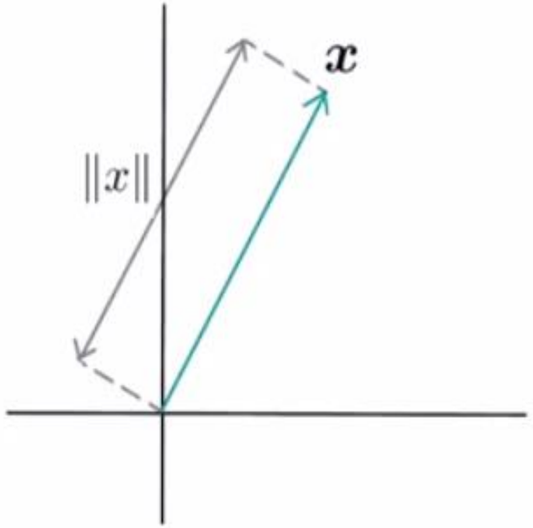
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}|}{\|x\|\|y\|}$$

Inner Product in Euclidean Space

$$\|x\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$



Inner Product in Hilbert Space

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

Inner Product in Hilbert Space

$$f \cdot g = \int f^* g$$

Norms

Norms

Norm: Çünkü quantum lojik kapısı olup olmadığını belirlemede çok önemli bir kriterdir. Quantum lojik kapısı olabilmesi için ifadenin normu 1'e eşit olmalıdır.

The *norm* of a vector $|v\rangle$ (written $|| \, |v\rangle ||$) is the *non-negative, real number*:

$$|| \, |v\rangle || = \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

A *unit vector* is a vector with norm 1.

Two vectors $|u\rangle$ and $|v\rangle$ are *orthogonal* if $\langle u|v\rangle = 0$.

An *orthonormal* basis for an inner product space $\mathbf{V}$ is a basis made up of *pairwise orthogonal, unit vectors*.

the term *Hilbert space* is also used for an inner product space

Outer Product
(Vektörel Çarpma)

Outer Product

With a pair of vectors $|u\rangle \in \mathbf{U}$, $|v\rangle \in \mathbf{V}$ we associate a linear operator $|u\rangle\langle v| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$, known as the *outer product* of $|u\rangle$ and $|v\rangle$.

$$(|u\rangle\langle v|)|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|u\rangle$$

$|v\rangle\langle v|$ is the *projection* on the one-dimensional space generated by $|v\rangle$.

Any linear operator can be expressed as a linear combination of outer products:

$$A = \sum_{ij} A_{ij}|i\rangle\langle j|.$$

Tensor Products

In matrix terms,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mm}B \end{bmatrix}$$

$$\textit{outer product}: \ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \end{pmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_j \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_ib_1 & a_ib_2 & \cdots & a_ib_j \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Tensor Products

If $\mathbf{U}$ is a vector space of dimension m and $\mathbf{V}$ one of dimension n then $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ is a space of dimension mn.

Writing $|uv\rangle$ for the vectors in $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$:

- $|(u + u')v\rangle = |uv\rangle + |u'v\rangle$
- $|u(v + v')\rangle = |uv\rangle + |uv'\rangle$
- $z|uv\rangle = |(zu)v\rangle = |u(zv)\rangle$

Given linear operators $A : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ and $B : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, we can define an operator $A \otimes B$ on $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ by

$$(A \otimes B)|uv\rangle = |(Au), (Bv)\rangle$$

tensor product of vectors

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ x_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 \\ x_0 y_1 \\ x_1 y_0 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 z_0 \\ x_0 y_0 z_1 \\ x_0 y_1 z_0 \\ x_0 y_1 z_1 \\ x_1 y_0 z_0 \\ x_1 y_0 z_1 \\ x_1 y_1 z_0 \\ x_1 y_1 z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvalue Equation

Özdeğer, Özvektör

- Özdeğer ve Özvektörler, matrisin orjinal yapısı ile ilgili stratejik bilgiler verdiğinden, matri quantum lojik kapısının matematiksel ifadesi olduğun çok kritik değerlerdir.
- Özdeğerler, bir matrisin orijinal yapısını görmek için kullanılan alternatif bir yoldur.
- Bazı vektörler bir **A** matrisi ile çarpıldıkları zaman yön değiştirir, bazıları ise değiştirmezler.
- Bazı özel **x** vektörleri, A**x** vektörü ile aynı yönde kalmaktadır. İşte bu vektörlere "özvektörler" denir.
- Bir özvektörün **A** matrisi ile çarpımı olan A**x** vektörü, orijinal **x** vektörünün $\lambda \epsilon R$ olmak üzere λ katıdır.

Tanım: *Özdeğer, Özvektör*

- **A** bir *n*x*n* boyutlu kare matris olsun. Eğer *λ* bir skaler ve **x** vektörü de sıfır olmayan, **x ≠ 0** , bir sütun vektörü olmak üzere, **Ax=λx** eşitliği sağlanıyorsa **x** vektörü, **A** matrisinin özvektörü, λ skaleri de **A** matrisinin özdeğeridir.
- Aynı zamanda **x**, λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.
- Bir skaler olan *λ*, *n*x*n* boyutlu **A** matrisi için **Ax=λx** denkleminde **x**'in sonsuz çözümü olduğu durumda bir özdeğer tanımlar.
- Temel denklem **Ax=λx** şeklindedir. Burada λ skaleri **A** matrisinin bir özdeğeridir. Bu skaler, özvektörün **A** matrisi ile çarpılması halinde elde edilen yeni vektörün uzunluğunun, orijinal **x** vektörüne göre büyüdüğü, küçüldüğü ya da aynı kalıp kalmadığı bilgisini vermektedir.
- Özdeğer sıfır değerini alabilir. Bu durumda **Ax=**0**x** olur ve özvektör **x**, sıfır uzayında tanımlıdır.
- Eğer **A** birim matris ise, **Ix=x** olur. Bu durumda *n*×1 boyutlu tüm vektörler özvektördür ve **A** matrisinin tüm özdeğerleri λ=1'dir.
- **A** matrisinin *T* :Real n değerleri için bir doğrusal dönüşümün tanım matrisi olduğu varsayılsın.
- Bu durumda **Ax=**λ**x** eşitliği sağlanıyorsa *T(*x**)=λx** olur. Bunun anlamı, eğer **x**, **A** matrisinin özvektörü ise *T* dönüşümünün sonucunda **x** vektörünün görüntüsü bir skalerle çarpımı olan λ**x** vektörüdür.

Eigenvalue Equation

$$A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$$

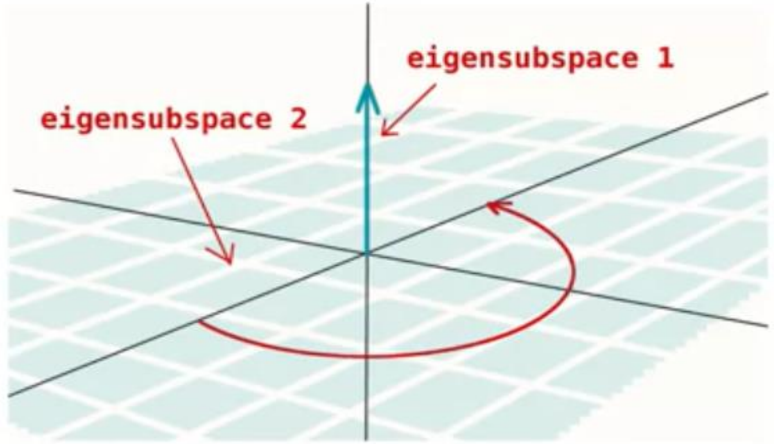
Properties

$$A|\phi\rangle = \lambda_1|\phi\rangle \implies A(\alpha|\phi\rangle) = \lambda_1\alpha|\phi\rangle$$

$$\forall |\phi_k\rangle \in \{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^p \quad A|\phi_k\rangle = \lambda_2|\phi_k\rangle \implies$$

$$\implies A(\textstyle\sum_{i=1}^p \alpha_i|\phi_i\rangle) = \lambda_2(\textstyle\sum_{i=1}^p \alpha_i|\phi_i\rangle)$$

Example — Rotation



Hermitian Operators

1. Eigenvalues are real

$A^* = A$

$$\langle x|A|x\rangle = (\langle x|A)|x\rangle = \lambda^*\|x\|$$

$$\langle x|A|x\rangle = \langle x|(A|x\rangle) = \lambda\|x\|$$

2. Eigenvectors for different eigenvalues are mutually orthogonal

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle$$

$$A|y\rangle = \mu|y\rangle$$

$$\langle x|A|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle = \mu\langle x|y\rangle \implies \langle x|y\rangle = 0$$

Eigenvalues of matrices are used in analysis and synthesis

Eigenvalues

An *eigenvector* of a linear operator $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ is a non-zero vector $|v\rangle$ such that

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

for some complex number λ

λ is the *eigenvalue* corresponding to the eigenvector v.

The eigenvalues of A are obtained as solutions of the characteristic equation:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Each operator has at least one eigenvalue.

Diagonal Representation

A linear operator A is *diagonalisable* if

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$$

where the $|v_i\rangle$ are an orthonormal set of eigenvectors of A with corresponding eigenvalues λ_i.

Equivalently, A can be written as a matrix

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

in the basis $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ of its eigenvectors.

Hermitian Operator

Normal and Hermitian Operators

An operator A is said to be *normal* if

$$AA^\dagger = A^\dagger A$$

Fact: An operator is diagonalisable if, and only if, it is normal.

A is said to be *Hermitian* if $A = A^\dagger$

A normal operator is Hermitian if, and only if, it has real eigenvalues.

Action on the Left

$$\langle\phi| \in \mathcal{H}^*$$

$$\langle\phi|_A : \langle\phi|_A |x\rangle = \langle\phi| (A |x\rangle)$$

$$\langle\phi|_A = |\phi_A\rangle^* , \qquad |\phi_A\rangle - ?$$

Action on the Left

$$\langle\phi| A = \langle\phi|_A$$

$$|\phi_A\rangle = (\langle\phi| A)^*$$

Action on the Left

$$\langle\phi| A = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \cdots & \phi_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrix Element

$$(\langle\phi| A) |\psi\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \cdots & \phi_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Matrix Element

$$\langle\phi| A |\psi\rangle =$$

$$= (\langle\phi| A) |\psi\rangle = \langle\phi| (A |\psi\rangle)$$

Hermitian Adjoint

$$|\phi\rangle \xrightarrow{*} \langle\phi| \xrightarrow{A} \langle\phi| A = \langle\phi_A| \xrightarrow{*} |\phi_A\rangle$$

Hermitian Adjoint

$$(\langle\phi| A)^* = A^* |\phi\rangle$$

Hermitian Conjugation

1. $\alpha \xrightarrow{*} \overline{\alpha} \xrightarrow{*} \alpha$
2. $|\phi\rangle \xrightarrow{*} \langle\phi| \xrightarrow{*} |\phi\rangle$
3. $A \xrightarrow{*} A^* \xrightarrow{*} A$

Hermitian Conjugation

$$(\alpha |a\rangle \langle b| \langle c| ABC |d\rangle)^* =$$

$$= \overline{\alpha} \langle d| C^* B^* A^* |c\rangle |b\rangle \langle a|$$

Hermitian Adjoint

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12} & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ & & \vdots & \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

Hermitian Operators

$$\boxed{A^* = A}$$

Projection Operator

$$|\phi\rangle \in \mathcal{H}, \qquad \|\phi\| = 1$$

$$|\phi\rangle\langle\phi|$$

Projection Operator

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \cdots & \phi_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

Projection Operator

$$|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle$$

Projection Operator

$$P_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \qquad i = 1 \cdots k \qquad \langle\phi_i|\phi_j\rangle = 0$$

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Closure Relation

$$P_i = |e_i\rangle \langle e_i| , \quad i = 1 \cdots n \quad \langle e_i|e_j\rangle = 0$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \langle e_i| = I$$

Projection, Eigenvalues

$$(|\phi\rangle \langle\phi|) |\phi\rangle = |\phi\rangle \langle\phi|\phi\rangle = |\phi\rangle , \quad \lambda_1 = 1, \quad degeneracy = 1$$

$$|\psi\rangle \perp |\phi\rangle$$

$$(|\phi\rangle \langle\phi|) |\psi\rangle = |\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad degeneracy = n - 1$$

Usage Notes

- A lot of slides are adopted from the presentations and documents published on internet by experts who know the subject very well.
- I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,

Dr. Cahit Karakuş

cahitkarakus@gmail.com